ЛЕМА 3.8. *Нека је I основни интервал такав да је $m_\alpha(I) < +\infty$ и нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоје основни интервали I' и I'', компактан скуп K и отворен скуп V такви да је*

$$I' \subset K \subset I \subset V \subset I'',$$

$$m_\alpha(I) - \varepsilon < m_\alpha(I') \le m_\alpha(I) \le m_\alpha(I'') < m_\alpha(I) + \varepsilon.$$

$\triangle$ Случај $I = \emptyset$ је тривијалан, тада можемо узети $K = V = I' = I'' = \emptyset$. Нека је I непразан. Ако је $I = [a, b)$ онда из непрекидности слева следи да постоје s и t такви да је $s < a < t < b$, $\alpha(s) > \alpha(a) - \varepsilon$ и $\alpha(t) > \alpha(b) - \varepsilon$, па узмимо $I' = [a, t)$, $K = [a, t]$, $V = (s, b)$ и $I'' = [s, b)$. Ако је пак $I = (-\infty, b)$ онда из непрекидности слева следи да постоје s и t такви да је $-\infty < s < t < b$, $\alpha(s) - \alpha(-\infty) < \varepsilon/2$ и $\alpha(b) - \alpha(t) < \varepsilon/2$. Нека је, у том случају, $I' = [s, t)$, $K = [s, t]$, $V = I'' = I$.

У оба случаја су I' и I'' основни интервали, V је отворен, а K је компактан и $I' \subset K \subset I \subset V \subset I''$. Осим тога, у првом случају је $m_\alpha(I \setminus I') = m_\alpha([t, b)) = \alpha(b) - \alpha(t) < \varepsilon$, а и у другом случају је $m_\alpha(I \setminus I') = m_\alpha((-\infty, s)) + m_\alpha([t, b)) < \varepsilon$. Затим, у првом случају је $m_\alpha(I'' \setminus I) = m_\alpha([s, a)) = \alpha(a) - \alpha(s) < \varepsilon$, а у другом случају је та неједнакост тривијална. $\square$

Приметимо да за сваки основни интервал I важи

$$m_\alpha(I) = \sup\{m_\alpha(I_*) : I_* \in \mathfrak{I}^1,\ I_* \subset I,\ m_\alpha(I_*) < +\infty\}. \tag{3.6}$$

Ако је $m_\alpha(I) < +\infty$, онда је горња релација очигледна јер можемо узети $I_* = I$. Претпоставимо да је $m_\alpha(I) = +\infty$. Ако је $I = (-\infty, b)$ бирамо $I_n = [-n, b)$ ако је $b \in \mathbb{R}$, ако је $I = [a, +\infty)$ онда бирамо $I_n = [a, n)$, а ако је $I = (-\infty, +\infty)$ онда бирамо $I_n = [-n, n)$. У сва три случаја је $\lim_{n\to\infty} m_\alpha(I_n) = +\infty$ и $I_n \in \mathfrak{I}^1$, што доказује (3.6), јер за I_* можемо узети I_n за довољно велико $n \in \mathbb{N}$.

Фиксирајмо $\varepsilon > 0$ и основни интервал $I_* \subset I$ такав да је $m_\alpha(I_*) < +\infty$. На основу леме 3.8 постоје компактан скуп $K \subset I_*$, основни интервал $I'_* \subset K$, низ $V_n \supset I_n$ отворених скупова и низ $I''_n \supset V_n$ основних интервала таквих да је $m_\alpha(I'_*) > m_\alpha(I_*) - \varepsilon$ и $m_\alpha(I''_n) < m_\alpha(I_n) + 2^{-n}\varepsilon$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$K \subset I_* \subset I = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n,$$

па можемо издвојити коначно потпокривање $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} V_i$ компактног скупа K. Тада је и $I'_* \subset K \subset \bigcup_{n=1}^{N} V_i \subset \bigcup_{n=1}^{N} I''_n$, одакле следи

$$\begin{aligned} m_\alpha(I_*) \le m_\alpha(I'_*) + \varepsilon \le m_\alpha\Big(\bigcup_{n=1}^{N} I''_n\Big) + \varepsilon \ &\le \varepsilon + \sum_{n=1}^{N} m_\alpha(I''_n) \\ \le \varepsilon + \sum_{n=1}^{N}\Big[m_\alpha(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big] < 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{N} m_\alpha(I_n) &< 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} m_\alpha(I_n). \end{aligned}$$

С обзиром да је $\varepsilon > 0$ произвољно, доказали смо $m_\alpha(I_*) \le \sum_{n=1}^{\infty} m_\alpha(I_n)$. Узимањем супремума по левој страни претходне неједнакости на основу (3.6)